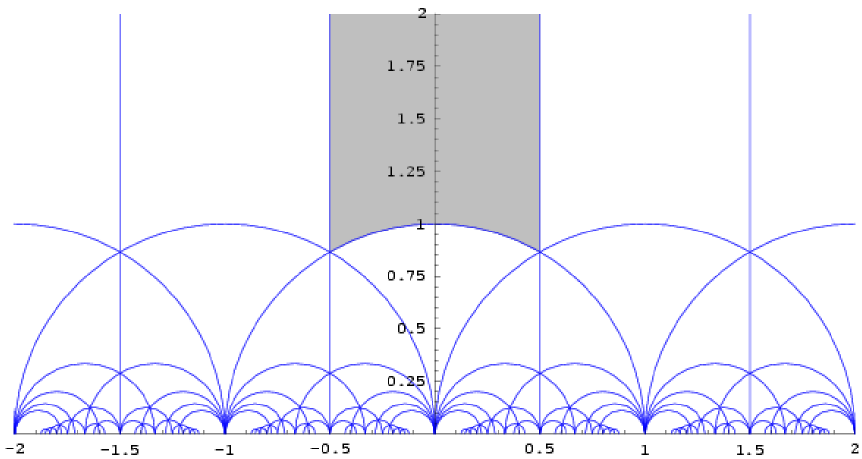
ARGOMENTI SCELTI DI GEOMETRIA IPERBOLICA 2019/20
ESERCIZI BISETTIMANALI

È lecito risolvere un esercizio usando quelli precedenti.

1. Esercizi del 14 marzo

Esercizio 1.1. Mostra che il triangolo grigio T nella figura seguente è un dominio fondamentale per il sottogruppo discreto $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{Z}) < \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$.



Esercizio 1.2. Mostra che il sottogruppo $\Gamma(2) < \mathrm{PSL}(2,\mathbb{Z})$ non contiene elementi ellittici (a lezione abbiamo considerato $\Gamma(n) = \ker\big(\mathrm{PSL}(2,\mathbb{Z}) \to \mathrm{PSL}(2,\mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}})\big)$ e abbiamo dimostrato che $\Gamma(n)$ non contiene ellittici se $n \geq 4$). Calcola l'area della superficie $S = \mathbb{H}^2/_{\Gamma(2)}$. Cerca di determinare il tipo topologico della superficie S.

Esercizio 1.3. Mostra che per ogni $0 \leq \alpha, \beta, \gamma \leq \frac{\pi}{2}$ con $\alpha+\beta+\gamma < \pi$ esiste un unico triangolo in $\mathbb{H}^2$ (a meno di isometria) con questi angoli interni.

Esercizio 1.4. Mostra che i triangoli in $\mathbb{H}^2$ sono uniformemente sottili: esiste un $K > 0$ tale che per qualsiasi triangolo $\Delta \subset \mathbb{H}^2$, qualsiasi punto p in un lato di Δ è a distanza $< K$ da uno degli altri due lati di Δ.

Esercizio 1.5. Sia $\Delta \subset \mathbb{H}^2$ un triangolo e l la lunghezza di un lato qualsiasi di Δ. Mostra che $\mathrm{Area}(\Delta) < l$.

Esercizio 1.6. Sia $\Gamma < \mathbb{R}^2$ un gruppo di traslazioni generato da due vettori indipendenti. Mostra che un dominio di Dirichlet per Γ è generalmente un esagono e in casi particolari un quadrilatero.

Esercizio 1.7. Mostra che il cubo ideale regolare C in $\mathbb{H}^3$ si decompone in cinque tetraedri ideali regolari T e deduci che $\mathrm{Vol}(C) = 5\mathrm{Vol}(T)$.

Esercizio 1.8. Considera un triangolo iperbolico con angoli $\alpha, \beta, \frac{\pi}{2}$ e siano a, b, c le lunghezze dei lati oppposti a questi angoli. Mostra che

$$\cosh c = \cosh a \cosh b.$$

Esercizio 1.9. Sia f una isometria parabolica di $\mathbb{H}^n$. Mostra che esiste sempre un piano iperbolico invariante per f.

Esercizio 1.10. Mostra che due elementi $f, g \in \mathrm{Isom}^+(\mathbb{H}^2)$ commutano $\Longleftrightarrow$ hanno gli stessi punti fissi in $\overline{\mathbb{H}^2}$.

2. Esercizi del 28 marzo

Esercizio 2.1. Sia $M = \mathbb{H}^n/_\Gamma$ una varietà iperbolica di volume finito. Mostra che nessun elemento non banale di $\mathrm{Isom}(\mathbb{H}^n)$ commuta con tutti gli elementi di Γ.

Esercizio 2.2. Costruisci una famiglia di superfici iperboliche compatte con un numero arbitrariamente alto di isometrie. Delinea una strategia per costruire una superficie iperbolica compatta che non abbia isometrie oltre all'identità.

Esercizio 2.3. Considera gli interi di Gauss $\mathbb{Z}[i] \subset \mathbb{C}$. Mostra che un dominio fondamentale per il gruppo discreto $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z}[i]) < \mathrm{PSL}(2, \mathbb{C}) = \mathrm{Isom}^+(\mathbb{H}^3)$ è l'insieme (nel modello del semispazio di $\mathbb{H}^3$) seguente:

$$D = \left\{ (x, y, z) \in H^3 \;\middle|\; x^2 + y^2 + t^2 \geq 1,\ -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2},\ 0 \leq y \leq \frac{1}{2} \right\}.$$

Esercizio 2.4. Determina un sottogruppo Γ del gruppo discreto $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z}[i]) < \mathrm{PSL}(2, \mathbb{C}) = \mathrm{Isom}^+(\mathbb{H}^3)$ che abbia indice finito e che non contenga elementi ellittici. La varietà iperbolica $M = \mathbb{H}^3/_\Gamma$ è compatta? Ha volume finito?

Esercizio 2.5. Sia $M = \mathbb{H}^n/_\Gamma$ una varietà iperbolica compatta. Considera l'insieme $S \subset \partial\mathbb{H}^n$ formato da tutti i punti che sono estremo di qualche asse di qualche trasformazione iperbolica di M. Mostra che S è denso in $\partial\mathbb{H}^n$.

Esercizio 2.6. Sia $P \subset \mathbb{H}^3$ il dodecaedro regolare iperbolico con tutti gli angoli diedrali pari a $\frac{2\pi}{5}$. Identifica ogni pentagono con il pentagono opposto, ruotato in senso antiorario di $\frac{3\pi}{5}$. Convinci te stessa/o che il risultato è una 3-varietà iperbolica compatta, che si chiama *varietà di Seifert - Weber*.

Esercizio 2.7. Usando le simmetrie, determina l'angolo diedrale del 24-celle ideale regolare in $\mathbb{H}^4$ (vedi Wikipedia per la definizione e le proprietà del 24-celle, uno dei politopi regolari in dimensione 4).

Esercizio 2.8. Usiamo il modello dell'iperboloide. Data una matrice non banale $A \in \mathrm{Isom}(\mathbb{H}^n) = \mathrm{Isom}(I^n) = O^+(n, 1)$, determina un criterio per capire se A è ellittica, parabolica o iperbolica.

Esercizio 2.9. Costruisci esplicitamente per ogni $n \geq 5$ una superficie iperbolica compatta tassellata in un certo numero di poligoni retti regolari con n lati (puoi dare per buono che questo poligono esiste ed è univocamente determinato da n, oppure dimostrarlo).

Esercizio 2.10. Costruisci una 3-varietà iperbolica di volume finito tassellata in un certo numero di ottaedri ideali regolari, ricordando che questi hanno angolo diedrale retto.

3. Esercizi dell'11 aprile

Indichiamo con S_g una superficie chiusa orientabile di genere g, e con $\mathcal{S} = \mathcal{S}(S_g)$ l'insieme delle curve semplici chiuse non orientate e non banali su S_g, considerate a meno di isotopia. Data una $a \in \mathcal{S}$ in S_g, indichiamo con $T_a \in \mathrm{MCG}(S_g)$ il Dehn twist lungo a. Notiamo che il gruppo $\mathrm{MCG}(S_g)$ agisce su $\mathcal{S}$ in modo naturale.

Esercizio 3.1. Dimostra che i Dehn twist T_a hanno ordine infinito nel mapping class group $\mathrm{MCG}(S_g)$. [Hint: analizzare l'azione su $H_1(S_g, \mathbb{Z})$.]

Esercizio 3.2. Risolvi i punti seguenti.

(1) Dimostra che $T_a = T_b$ in $\mathrm{MCG}(S_g)$ se e solo se $a = b$ in $\mathcal{S}$.
(2) Dimostra che, dati $f \in \mathrm{MCG}(S_g)$ e $a \in \mathcal{S}$, vale $T_{f(a)} = fT_af^{-1}$. Deduci che f commuta con T_a se e solo se $f(a) = a$.

Esercizio 3.3. Risolvi i punti seguenti per ogni $a, b \in \mathcal{S}$.

(1) Dimostra che $i(a, b) = 0 \Leftrightarrow T_a(b) = b \Leftrightarrow T_aT_b = T_bT_a$, dove $i(a, b)$ indica l'intersezione geometrica delle curve a e b.
(2) Dimostra che se $i(a, b) = 1$, allora T_a e T_b soddisfano la *braid relation* $T_aT_bT_a = T_bT_aT_b$. [Hint: usare uno degli esercizi precedenti].

Esercizio 3.4. Dimostra che il toro piatto esagonale qui sotto corrisponde all'immagine del punto $z = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \in \mathbb{H}^2 = \mathrm{Teich}(T^2)$ nello spazio dei moduli $\mathrm{Mod}(T^2)$ (il punto conico di ordine 3).

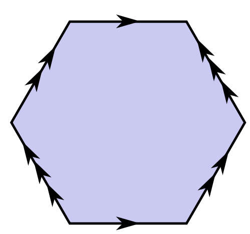


Figura 3.1. Un toro piatto ottenuto identificando isometricamente lati opposti di un esagono euclideo regolare.

Esercizio 3.5. Un'*involuzione iperellittica* è un elemento di ordine 2 di $\mathrm{MCG}(S_g)$ che agisce come $-\mathrm{id}$ su $H_1(S_g, \mathbb{Z})$. Dimostra che ogni superficie S_g con $g \geq 1$ ammette almeno un'involuzione iperellittica.

Esercizio 3.6. Sia $g \geq 2$. Dimostra che se $f \in \mathrm{MCG}(S_g)$ agisce su $\mathrm{Teich}(S_g)$ fissando un punto m, allora f corrisponde alla classe di isotopia di un'isometria di S_g con la metrica definita da m. Deduci che i punti singolari di $\mathrm{Mod}(S_g)$ corrispondono a metriche che ammettono simmetrie non banali.

Esercizio 3.7. A lezione abbiamo definito una topologia (la topologia algebrica) sullo spazio di Teichmüller di S_g per ogni $g \geq 2$. Adatta questa definizione al caso del toro e dimostra che con tale topologia la corrispondenza tra $\mathrm{Teich}(T^2)$ e $\mathbb{H}^2$ è un omeomorfismo.

4. Esercizi del 2 maggio

Esercizio 4.1. Una 3-varietà orientabile compatta con bordo vuoto o bordo torico M è *atoroidale* se ogni mappa π_1-iniettiva $f : T^2 \mapsto M$ è omotopa a una mappa a valori in una componente di bordo. Dimostra che una varietà iperbolica M (completa e di volume finito) è sempre atoroidale.

[Hint: distingui i casi in cui il bordo è vuoto o non vuoto. Usa il fatto che ogni sottogruppo di $\pi_1(M)$ isomorfo a $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ è generato da parabolici con punto fisso in comune. Per il caso con bordo, devi anche usare il fatto che $\pi_2(M)$ è banale.]

Esercizio 4.2. Dimostra che se $M = S^3 \setminus \nu K$ è il complementare di un intorno tubolare di un nodo, allora $H_1(M, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$. Deduci che è ben definita (a meno dell'orientazione) una curva semplice chiusa (la *longitudine*) nel toro di bordo $T^2 = \partial M$ che genera il nucleo dell'omomorfismo tra $H_1(T^2, \mathbb{Z})$ e $H_1(M, \mathbb{Z})$ indotto dall'inclusione. [Hint: usa Meyer-Vietoris applicato a $S^3 = M \cup (D^2 \times S^1)$, dove $D^2 \times S^1$ è un intorno tubolare più grande di K.]

Nota che è inoltre ben definita (sempre a meno dell'orientazione) una curva semplice chiusa m (il *meridiano*) in T^2 che genera il nucleo dell'omomorfismo tra $H_1(T^2, \mathbb{Z})$ e $H_1(D^2 \times S^1, \mathbb{Z})$ indotto dall'inclusione. Pertanto c'è un modo canonico di definire un meridiano e una longitudine sul bordo di M.

Esercizio 4.3. Costruisci una 3-varietà iperbolica non compatta tassellata da un tetraedro ideale regolare (la varietà di Gieseking). [Hint: La varietà in questione è non orientabile. Puoi costruirla a mano, oppure notare che il suo rivestimento doppio orientante è il complementare del nodo figura 8.]

Esercizio 4.4. Costruisci una 3-varietà iperbolica tassellata da due ottaedri ideali regolari iperbolici. [Hint: lasciati ispirare dall'esercizio precedente, e dall'esempio visto a lezione. La soluzione non è unica.]

Esercizio 4.5. Considera il dodecaedro regolare sferico in S^3 con angoli diedrali $\frac{2\pi}{3}$. Identifica le facce opposte tramite isometrie in modo che il risultato sia una varietà sferica M. [Hint: cerca la costruzione più simmetrica possibile.] Calcola $H_1(M, \mathbb{Z})$.

Esercizio 4.6. Mostra che per ogni $\alpha > 0$ abbastanza piccolo esiste un tetraedro troncato iperbolico in cui gli angoli diedrali dei 12 spigoli adiacenti ai triangoli sono retti, mentre i 6 spigoli compresi tra due esagoni hanno angolo diedrale α. [Hint: prendi 4 piani ultraparalleli in $\mathbb{H}^3$ posizionati nel modo più simmetrico possibile, e considera le uniche geodetiche ortogonali fra questi.] Cerca di intuire per quali $\alpha \in [a, b]$ esiste questo poliedro, quali sono gli estremi massimali a e b e quali poliedri si ottengono al limite per α che tende ad a e a b.

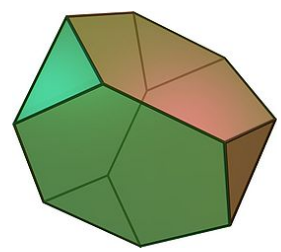


Figura 4.1. Un tetraedro troncato.

5. Esercizi del 16 maggio

Esercizio 5.1. Sia $P \subset \mathbb{H}^n$ un politopo ad angoli retti, e c una colorazione propria di P a valori in uno spazio vettoriale V su $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Determina un criterio per stabilire se la varietà definita dalla colorazione è orientabile. [Hint: le riflessioni invertono l'orientazione.]

Esercizio 5.2. Sia $P_n \subset \mathbb{H}^2$ il poligono regolare iperbolico ad angoli retti e con $n \geq 5$ lati. Nota che ogni colorazione propria di P_n deve prendere valori in uno spazio vettoriale di dimensione almeno 2 su $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Costruisci esplicitamente una colorazione propria (non necessariamente orientabile) a valori in $V = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Esercizio 5.3. Un gruppo di Coxeter Γ è pari se tutte le relazioni che coinvolgono due diversi generatori sono del tipo $(g_i \cdot g_j)^{2m_{i,j}} = 1$. Dato un generico gruppo di Coxeter pari Γ, costruisci esplicitamente un omomorfismo $\phi : \Gamma \to F$, dove F è un gruppo finito, con la proprietà che il nucleo di ϕ non contiene elementi di torsione.

Esercizio 5.4. Considera la terna data dal gruppo di Lie $G = \mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$, dal sottogruppo comaptto $K = \mathrm{SO}(n, \mathbb{R})$, e dall'automorfismo invoultivo di G definito da $\sigma(M) = (M^{-1})^T$ (trasposizione + inversione). Evidentemente $K = C(\sigma)$. Descrivi esplicitamente lo spazio simmetrico associato a questa terna nel modo seguente:

- Poni $X = \{A \in \mathrm{SL}(\mathbb{R}) | A$ è simmetrica e definita positiva $\}$. Verifica che $\alpha : G \times X \to X$ definita da $\alpha(M, A) = MAM^T$ definisce un'azione transitiva di G su X e che $K = \mathrm{Stab}_G(Id)$. Convinciti che X è naturalmente identificato a G/K.
- Dando per buono il fatto che $T_{Id}X = \{B \in \mathrm{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R}) | B$ è simmetrica e $\mathrm{tr}(B) = 0\}$, verifica che $< B, C >= \mathrm{tr}(BC)$ definisce un prodotto scalare K-invariante su $T_{Id}X$. Concludi che tale prodotto scalare può essere esteso a una metrica Riemanniana G-invariante su X.
- Verifica che la mappa $\tau : X \to X$ definita da $\tau(A) = A^{-1}$ è un automorfismo involutivo di X tale che $\tau(\alpha(M, A)) = \alpha(\sigma(M), \tau(A))$. Mostra che l'identità è un punto fisso isolato per τ.

Esercizio 5.5. Usando la restrizione degli scalari, costruisci reticoli aritmetici in $\mathrm{SO}(m, n)$, per ogni $m, n > 0$.

Esercizio 5.6. Esercizio per i più temerari: dimostra che se f e g sono forme ammissibli definite su un campo totalmente reale K e tali che $f \sim_K k \cdot g$ per qualche $k \in K$, allora f e g definiscono reticoli commensurabili. Procedi nel modo seguente:

- Riconduciti al caso in cui f e g sono equivalenti su K.
- Denota con $M \in \mathrm{GL}(n, K)$ la matrice di cambio base e con $\mathcal{O}$ l'anello degli interi di K. Usando il fatto che M e M^{-1} si possono scrivere rispettivamente come N/b e L/c, dove N e L sono matrici a coefficienti in $\mathcal{O}$ e $b, c \in \mathbb{Z}$, trova un opportuno sottogruppo di congruenza $G < \mathrm{SO}(f, \mathcal{O})$ tale che $MGM^{-1} < \mathrm{SO}(g, \mathcal{O})$.
- Concludi che $\mathrm{SO}(g, \mathcal{O})$ e $M\mathrm{SO}(f, \mathcal{O})M^{-1}$ sono commensurabili.